*Прокофьева Н.А., учитель математики*

*МБОУ «СОШ с. Кубанка» Переволоцкого района Оренбургской области*

**Практикум по решению второй части по теме «Теория чисел (задание № 19)». Виды данных заданий, алгоритмы их решения, типичные ошибки, оформление решения заданий в бланках.**

Известно, что на ЕГЭ по математике (профильный уровень) многие школьники не приступают к задаче 19 и даже не читают её (а зачем? — всё равно, мол, не решу).

Задание 19 проверяет умение строить и исследовать простейшие математические модели. Задание составлено таким образом, что, с одной стороны, тематически оно вполне доступно даже ученикам основной школы, а с другой стороны, для его решения требуется не столько формальная математическая образованность (знание терминов, формул, правил, готовых алгоритмов), сколько общая математическая культура, т.е. сформированная привычка самостоятельно ориентироваться в математической ситуации, умение грамотно строить рассуждения. А это умение у подавляющего большинства школьников отсутствует начисто — ведь в школе, к сожалению, до развития математической культуры дело обычно не доходит.

Учиться культурно рассуждать можно и обязательно нужно. Задача 19 предоставляет для этого отличную возможность. Получаться начнёт далеко не сразу, так что готовиться к 19 следует начинать задолго до ЕГЭ. Рецепт тут один: решать, решать и решать.

Для выполнения этого задания определенных алгоритмов не существует, все рассуждения должны быть обоснованными, а приводимые примеры убедительными и удовлетворяющими всем условиям задачи.

Условия задания №19 разбиты на пункты. По существу, задача разбита на ряд подзадач (частных случаев), последовательно решая которые можно в итоге справиться с ситуацией в целом. За всю задачу даётся 4 первичных балла, по 1-2 балла за каждый пункт. Поэтому, сделав хотя бы часть задачи (скажем, просто предъявив нужный пример в одном из пунктов), можно получить себе в копилку дополнительные первичные баллы.

**Типичные ошибки:** в большинстве работ встречаются только ответы, неполные обоснования доказываемых утверждений (на вопрос «Может ли?» нужно давать аргументированное решение, а не ответ «да» или «нет»); вычислительные ошибки.

Подготовка к выполнению задания 19 должна быть индивидуальной для одаренных учащихся профильных физико-математических классов, должна осуществляться на протяжении изучения всего курса математики в школе. Необходимо постоянное развитие мыслительных операций такого ученика: решение задач повышенной сложности и участие в олимпиадах, решение нестандартных задач, головоломок; поддержание интереса и мотивации, развитие логического мышления, умения доказывать и рассуждать, накопление различных способов и приемов, математического инструментария.

**Необходимая теория**

1. ***Числовые множества***

*Натуральные числа* — это числа 1, 2, 3, . . . Натуральные числа мы используем для счёта, а счёт начинается с единицы. Множество натуральных чисел обозначается ***N***.

*Целые числа* — это числа 0, ±1, ±2, ±3, . . . Таким образом, целые числа — это нуль и «плюс-минус натуральные». Натуральные числа являются целыми положительными числами. Множество целых чисел обозначается ***Z***.

*Рациональные числа* — это всевозможные дроби с целыми *m* и *n* (при этом, конечно, ; чтобы избежать данной оговорки, говорят также, что *m* — целое, а *n* — натуральное). Любое целое число является в то же время рациональным (например, ). Однако число не является целым. Множество рациональных чисел обозначается ***Q***.

1. ***Делимость***

*Определение*. Число *a* делится на , если найдётся число *c* такое, что .

Если *a* делится на *b*, то число *b* называется *делителем* числа *a*. Например, число 12 имеет шесть делителей: это 1, 2, 3, 4, 6 и 12.

**Сформулируем наиболее важные признаки делимости.**

• a делится на 2 ⇔ последняя цифра числа a чётная;

• a делится на 3 ⇔ сумма цифр числа a делится на 3;

• a делится на 4 ⇔ последние две цифры числа а составляют число, которое делится на 4;

• a делится на 5 ⇔ последняя цифра числа a есть 0 или 5;

• a делится на 6 ⇔ число а делится и на 2, и на 3;

• a делится на 7 ⇔ результат вычитания удвоенной последней цифры из числа а без последней цифры делится 7 (напр., 343 делится на 7, т.к. делится на 7);

• a делится на 8 ⇔последние три цифры числа а составляют число, которое делится на 8;

• a делится на 9 ⇔ сумма цифр числа a делится на 9;

• a делится на 10 ⇔ последняя цифра числа a равна 0;

• a делится на 11 ⇔сумма цифр в записи числа а, стоящих на чётных местах равна сумме цифр, стоящих на нечётных местах, или отличается от неё на 11 (напр., 2673 делится на 11, т.к. 2+7=6+3; 1529 делится на 11, т.к. 1+2=3, 5+9=14, 14-3=11);

• a делится на 13 ⇔ число его десятков, сложенное с учетверённым числом единиц этого числа делится на 13 (напр., 533 делится на 13, т.к. делится на 13).

• a делится на 13 ⇔если разностьэтого числа без его последней цифры и его последней цифры, умноженной на 5, делится на 17 (напр., 1564 делится на 17, т.к. делится на 17);

• a делится на 19 ⇔ если сумма этого числа без его последней цифры и его последней цифры, умноженной на 2, делится на 19 (напр., 1653 делится на 19, т.к. делится на 19).

***3. Чётность***

Соображения, связанные с чётностью или нечётностью, часто фигурируют в задачах 19.

***Определение.*** Число называется *чётным*, если оно делится на 2. Число называется *нечётным*, если оно не делится на 2.

Вот все чётные числа: 0, ±2, ±4, ±6, . . . Если *a* чётно, то оно имеет вид . А вот все нечётные числа: ±1, ±3, ±5, . . . Ясно, что если *a* нечётно, то оно имеет вид .

***Утверждения.***

• Сумма любого числа чётных слагаемых чётна.

• Сумма чётного числа нечётных слагаемых чётна. Сумма нечётного числа нечётных слагаемых нечётна.

• Пусть имеется произведение нескольких множителей. Если все множители нечётны, то произведение нечётно. Если хотя бы один множитель чётный, то произведение чётно.

***4. Деление с остатком***

Любое число *a* можно разделить с остатком на любое число . А именно, найдутся два числа *q* и *r* такие, что , и при этом будет выполнено неравенство|. Число *q* называется *частным*, а число *r*-*остатком* от деления *a* на *b*.

Если *r* = 0, то есть , то *a* делится на *b*.

Остаток от деления любого нечётного числа на 2 равен единице. Всякое нечётное число может быть записано в виде 2*n* + 1.

Остатки оказываются полезными во многих ситуациях. Допустим, в ходе решения задачи вам нужно доказать, что равенство не может выполняться ни при каких целых числах *n* и *k*. Рассуждаем следующим образом.

Число *n* при делении на 3 может давать остатки 0, 1 или 2. Иными словами, возможны три случая: или . Какие остатки при делении на 3 будут у числа ? Давайте посмотрим, что получается в каждом из трёх случаев.

 (остаток 0); (остаток 1); (остаток 1). Таким образом, квадрат целого числа при делении на 3 не может давать остаток 2. Следовательно, равенство действительно невозможно ни при каких *n* и *k*.

***5 Каноническое разложение***

Всякое число делится на 1 и на само себя. Если натуральное число *p* не равно 1 и не имеет других натуральных делителей, кроме 1 и *p*, то такое число *p* называется *простым*.

Вот первые несколько простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Число 2 — единственное чётное простое число.

Число, не равное 1 и не являющееся простым, называется *составным*. Единица не является ни простым числом, ни составным.

Всякое число можно разложить на простые множители.

Такое разложение единственно с точностью до порядка множителей и называется *каноническим разложением*. Утверждение о существовании и единственности канонического разложения носит название *основной теоремы арифметики.*

Каноническое разложение даёт полную картину делителей данного числа (и, в частности, позволяет найти их количество). Именно, пусть — каноническое разложение числа *a*. Тогда каноническое разложение любого делителя числа *a* состоит из простых множителей, входящих в набор показатели степени которых не превосходят соответственно чисел .

***6 Взаимно простые числа***

Числа называются *взаимно простыми*, если они не имеют общих делителей кроме 1. Иными словами, числа *a* и *b* взаимно простые, если НОД (*a, b*) = 1. Можно сказать и так: числа *a* и *b* взаимно простые тогда и только тогда, когда дробь несократима.

**Свойства взаимно простых чисел.**

Пусть числа *a* и *b* взаимно просты. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если некоторое число делится на *a* и *b*, то оно делится и на их произведение *ab*.

2. Если *an* делится на *b*, то *n* делится на *b*. (Вы легко поймёте, почему так получается, если представите себе «непересекающиеся» канонические разложения чисел *a* и *b* и вдобавок вспомните, что каноническое разложение делителя служит «частью» канонического разложения делимого числа).

Согласно утверждению 1, например, если некоторое число делится на 8 и на 15, то оно делится на 8 \* 15 = 120. То, что числа взаимно простые, — важное условие. Так, 12 делится на 4 и на 6, но не делится на 4 \* 6 = 24.

***7. Последовательности***

*Числовая последовательность* — это набор чисел, в котором каждому числу можно присвоить некоторый номер, причём каждому номеру отвечает единственное число данного набора. Номер — это натуральное число; нумерация начинается с единицы.

Весьма удобно, когда *n*-й член последовательности можно задать некоторой формулой. Например, формула

задаёт последовательность: −1, 1, 3, 5, 7, . . . Формула задаёт последовательность: −1, 1, −1, 1, . . .

***8. Арифметическая прогрессия***

*Арифметическая прогрессия* — это последовательность, каждый член которой (начиная со второго) равен сумме предыдущего члена и некоторого фиксированного числа:

Фиксированное число *d* называется *разностью арифметической прогрессии*.

Формула *n*-го члена арифметической прогрессии:

Формула суммы первых *n* членов арифметической прогрессии. Она имеет вид:

 .

Полезная модификация этой формулы получается, если в неё подставить формулу *n*-го члена:

.

***Свойство арифметической прогрессии.*** Если числа *a, b, c* образуют арифметическую прогрессию, то 2*b = a + c*.

***9. Геометрическая прогрессия***

*Геометрическая прогрессия* — это последовательность, каждый член которой (начиная со второго) равен произведению предыдущего члена и некоторого фиксированного числа:

Фиксированное число *q* называется *знаменателем геометрической прогрессии*.

Формула *n*-го члена геометрической прогрессии:

Для суммы первых *n* членов геометрической прогрессии нужно знать следующую формулу:

***Свойство геометрической прогрессии.*** Пусть числа *a, b, c* образуют геометрическую прогрессию. Тогда .

Иметь дело с рациональным знаменателем не очень удобно. Для конечной геометрической прогрессии, состоящей из целых чисел, существует несколько иное представление, хорошо приспособленное именно для задач 19.

***Представление конечной целочисленной геометрической прогрессии***.

• Геометрическая прогрессия из трёх целых чисел имеет вид:

 — целые).

• Геометрическая прогрессия из четырёх целых чисел имеет вид:

• Геометрическая прогрессия из пяти целых чисел имеет вид:

.

Вообще, пусть — целые числа, образующие геометрическую прогрессию. Тогда найдутся целые числа *k, a, b* такие, что

.

*Доказательство.* Докажем общий случай. Пусть знаменатель прогрессии

 равен *q*. Очевидно, *q* — число рациональное (иначе прогрессия не была бы целочисленной). Запишем *q* в виде несократимой дроби: . Имеем:

.

Поскольку *a* и *b* взаимно простые и — целое, число должно делиться на . Иными словами, найдётся целое *k* такое, что . Далее. последовательно получаем:

, что и требовалось.

***10. Метод «оценка плюс пример».***

*«Оценка плюс пример»* — это специальное математическое рассуждение, которое применяется в некоторых задачах при нахождении наибольших или наименьших значений.

Суть метода состоит в следующем. Предположим, что мы ищем наименьшее значение некоторой величины *A*. Действуем в два этапа.

1. *Оценка.* Показываем, что выполнено неравенство .

2. *Пример*. Предъявляем пример, когда достигается равенство .

Тем самым доказано, что наименьшее значение *A* равно *α*.

Проиллюстрируем данный метод на трёх задачах, расположенных по возрастанию сложности.

**1. Найти наименьшее значение функции .**

*Решение.* Выделим полный квадрат: Поскольку квадрат неотрицателен, получаем оценку: . Приводим пример, когда равенство достигается: . Следовательно, искомое наименьшее значение равно 2.

**2. Натуральные числа от 1 до 10 разбили на две группы так, что произведение чисел в первой группе делится на произведение чисел во второй группе. Какое наименьшее значение может принимать частное от деления первого произведения на второе?**

*Решение*. Число 7 должно быть в первой группе, поскольку оно простое и никакое другое число на него не делится. Следовательно, частное не меньше 7 (оценка). Приведём пример разбиения, при котором частное равно 7. Первая группа: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; вторая группа: 8, 9, 10. В таком случае .

Следовательно, наименьшее значение частного равно 7.

Хорошо, но откуда взялся пример? Возникает ощущение, что он с неба свалился.

***При записи решения необязательно объяснять, каким образом додумались до примера*.** Просто предъявить пример, и всё! Угадали его, почувствовали или получили свой пример логическим путём — это абсолютно никого не касается.

Оформляться это будет следующим образом.

В данном случае нам захотелось разбить числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 на две группы с равными произведениями. Для этого находим каноническое разложение произведения всех этих чисел: . Как видим, оно является квадратом числа . Остаётся лишь найти числа, произведение которых равно 720. Это, например, 8, 9, и 10.

**3. Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 13 раз больше, либо в 13 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 6075.**

**а) Может ли последовательность состоять из двух членов?**

**б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?**

**в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?**

*Решение.* а) Предположим, что в последовательности два члена. Тогда она имеет вид: *a, 13a* (или наоборот: *13a, a*). Согласно условию получаем: 14*a* = 6075. Это невозможно, так как слева стоит чётное число, а справа — нечётное. Следовательно, последовательность не может состоять из двух членов.

б) Да, может. Пример: 405, 5265, 405.

Данный пример строится легко. Ищем последовательность вида *a,* 13*a, a*. Получаем: 15*a* = 6075, откуда находим *a* = 405.

в) Прежде чем записывать решение, начнём с некоторых неформальных соображений.

Ясно, что чисел в последовательности будет тем больше, чем меньше сами числа. Поэтому надо по максимуму использовать 1 и 13, чередуя их. Попробуем так и начать: 1, 13, 1, 13, . . . Последовательность состоит из идущих друг за другом пар (1, 13); сумма в каждой паре равна 14. Какое число будет последним? Очевидно, 13 в конце оказаться не может — тогда сумма всех членов последовательности будет делиться на 14, а 6075 — число нечётное. Остаётся проверить единицу. Делим 6075 на 14 с остатком и получаем: 6075 = 14 · 433 + 13. Значит, и единицы в конце быть не может. Наша попытка потерпела неудачу, но результат деления с остатком подсказывает, что нужно сделать. Изменим чередование: 13, 1, 13, 1, . . . Тогда после 433 пар (13, 1) мы сможем завершить последовательность числом 13. Таким образом, нам удалось обойтись только числами 1 и 13, и возникает ощущение, что это и есть наиболее длинная последовательность. Вот теперь переходим к записи решения.

Заметим, что в последовательности может оказаться 867 членов. Пример:

.

Действительно, 433 · (13 + 1) + 13 = 6075.

Покажем, что большего числа членов быть не может. Предположим обратное: наша последовательность , . . . содержит не менее 868 членов. Разобьём их последовательно на пары: . . . Сумма чисел в каждой паре как минимум 14, а самих пар не менее 434. Сумма всех членов получится тогда не менее 14 · 434 = 6076, что противоречит условию. Значит, в последовательности может быть самое большее 867 членов.

**Примеры.**

***Демоверсия 2020 год.***

В школах № 1 и № 2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали, по крайней мере, 2 учащихся, а суммарно тест писали 9 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом. После этого один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы № 1 в школу № 2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.

а) Мог ли средний балл в школе № 1 уменьшиться в 10 раз?

б) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 10%, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 10%. Мог ли первоначальный средний балл в школе № 2 равняться 7?

в) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 10%, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 10%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе № 2.

**Решение.**

а) Пусть в школе № 1 писали тест 2 учащихся, один из них набрал 1 балл, а второй набрал 19 баллов и перешёл в школу № 2. Тогда средний балл в школе № 1 уменьшился в 10 раз.

б) Пусть в школе № 2 писали тест n учащихся, средний балл равнялся B, а перешедший в неё учащийся набрал x баллов. Тогда получаем: (Bn+x)/(n+1)=0.9B; x=0.9B(n+1)-Bn; 10x=(9-n)B

Если B=7, то(9-n)B не делится на 10, а 10x делится на 10. Но это невозможно, поскольку 10x=(9-n)B

в) Пусть в школе № 1 средний балл равнялся *A*. Тогда получаем:

(A(9-n)-x)/(8-n)=0.9A; x=(9-n)A-0.9(8-n)A; 10x=(18-n)A=(9-n)B

Заметим, что если B=1 или B=3, то 10x=(9-n)B не делится на 10. Если B=2 или B=4, то n=4. В первом случае а во втором  Значит, ни один из этих случаев не возможен.

При  и n=3 получаем x=3 и  Этот случай реализуется, например, если в школе № 1 писали тест 6 учащихся, 3 из них набрали по 1 баллу, а 3 — по 3 балла, в школе № 2 писали тест 3 учащихся и каждый набрал по 5 баллов, а у перешедшего из одной школы в другую учащегося — 3 балла.

Ответ: а) да; б) нет; в) 5.

***ЕГЭ математика 2017 год.***

На доске написано 30 различных натуральных чисел, десятичная запись каждого из которых оканчивается или на цифру 2, или на цифру 6. Сумма написанных чисел равна 2454.

а) Может ли на доске быть поровну чисел, оканчивающихся на 2 и на 6.

б) Может ли ровно одно число на доске оканчивается на 6?

в) Какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 6, может быть записано на доске?

Ответ: а) нет; б) нет; в) 11 чисел (6, 16, …, 86, 96,196 – сумма 706).

(19 чисел оканчиваются на 2 – сумма 1748)

***ЕГЭ математика 2019 год.***

**1.** Квадратное уравнение  имеет два различных натуральных корня.

а) Пусть  Найдите все возможные значения *p*.

б) Пусть Найдите все возможные значения *q*.

в) Пусть  Найдите все возможные корни исходного уравнения.

**Решение.**

а) Обозначим корни данного уравнения за  По теореме Виета  Разложить число 34 на два натуральных множителя можно только двумя способами:  Получаем, что  или  Отсюда по теореме Виета получаем, что  или 

б) Получаем уравнение  Отсюда   и  — целые неотрицательные числа, поэтому   (или наоборот). В любом случае 

в)  Числа  и  отличаются друг от друга на чётное число, поэтому они одной чётности, поэтому каждое из них делится на 2 и не делится на 4. Кроме того  поэтому остаются такие варианты:

1. 

2. 

Рассмотрим первый случай:  Натуральными решениями второго уравнения являются пары чисел (4; 2) или (2; 4), которые не являются решениями первого уравнения. Поэтому этот случай не приводит к решениям.

Рассмотрим второй случай:  Всевозможные натуральные решения второго уравнения это (40; 2), (14; 4), (4; 14), (2; 40). Первому уравнению удовлетворяют только пары (14; 4) и (4; 14).

Ответ: а) −35, −19; б) 48; в) 4 и 14.

**2.**Пять различных натуральных чисел таковы, что никакие два не имеют общего делителя, больше 1.

а) Может ли сумма всех пяти чисел быть равна 26?

б) Может ли сумма всех пяти чисел быть равна 23?

в) Какое наименьшее значение может принимать сумма всех пяти чисел?

**Решение.**

а) Разумно в поиске примера использовать простые числа. Пример быстро находится: 1 2 5 7 11.

б) Среди данных пяти чисел может быть не более одного четного числа. Если чётное число одно, тогда остальные четыре числа — нечетные. И сумма всех чисел — четная. Противоречие. Если чётных чисел нет, то сумма всех чисел не меньше, чем  Но  Противоречие.

в) Если четное число одно, то сумма чисел не меньше, чем  Если четных чисел нет, то, как ранее показано, сумма не меньше 25. Пример для суммы 18 приведен.

Ответ: а) Да; б) Нет; в) 18.

**3.**Есть синие и красные карточки. Всего карточек 50 штук. На каждой написаны натуральные числа, среднее арифметическое которых равно 16. Все числа на синих карточках разные. При этом любое число на синей карточке больше, чем любое на красной. Числа на синих увеличили в 2 раза, после чего среднее арифметическое стало равно 31,2.

а) Может ли быть 10 синих карточек?

б) Может ли быть 10 красных карточек?

в) Какое наибольшее количество синих карточек может быть?

**Решение.**

Пусть  − сумма на синих карточках,  − сумма на красных карточках. Тогда



а) Приведем пример. На каждой из сорока красных карточек написана 1. На синих карточках написаны числа: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 706 (760 − 54). Эти числа удовлетворяют системе.

б) Если красных карточек 10, то наибольшее число на красных карточках не может быть меньше 4 (иначе сумма на красных карточках не превосходит , что неверно). Тогда минимальное число на синих карточках не меньше 5. Тогда сумма на 40 синих карточках не меньше, чем . Противоречие.

в) Приведем пример для 35 синих карточек и 15 красных. На двенадцати красных карточках написано 3, на двух 1, и на одной 2. На синих карточках написано: 

Если же синих карточек больше 35, то красных меньше 15. Наибольшее число на красных карточках не может быть меньше 3 (иначе сумма на красных карточках не превосходит , что неверно). Тогда минимальное число на синих карточках не меньше 4. Тогда сумма на синих карточках не меньше, чем . Противоречие.

Ответ: а) да, б) нет, в) 35.

**4.**Последовательность натуральных чисел (*an*) состоит из 400 членов. Каждый член последовательности, начиная со второго, либо вдвое больше предыдущего, либо на 98 меньше предыдущего.

а) Может ли последовательность (*an*) содержать ровно 5 различных чисел?

б) Чему может равняться  если 

в) Какое наименьшее значение может принимать наибольший член последовательности (*an*)?

**Решение.**

а) Пусть *a* — первое число. Постараемся найти цепочку вида:



Для зацикливания требуется, чтобы . Это уравнение имеет натуральное решение: . Действительно, имеем цепочку, состоящую из пяти чисел:



б) По условию или , или . Но  — нечетное число, поэтому есть ровно одна возможность: .  — снова нечетное число, поэтому для  снова ровно одна возможность. Так всякий раз будут получаться нечетные числа, поскольку сумма нечетного и четного чисел является нечетным числом. Рассуждая аналогично, получаем: .

в) Заметим, что цепочка  удовлетворяет условиям. Докажем, что наибольший член последовательности не может быть меньше 112.

Пусть  — наибольший член последовательности (начиная с момента, когда впервые произошло умножение на 2; заметим, что в нашем случае 98 не может вычитаться дважды подряд). Тогда предыдущее число — это . Следовательно,  — четное.

Ясно, что значение 98 и меньше  быть не может, так как это бы означало, что в нашей цепочке, начиная с первого умножения на 2, ни разу не вычиталось 98. Следовательно, с этого момента были только умножения на 2. Но тогда, очевидно, нашелся бы член последовательности, который больше 112. Поэтому достаточно рассмотреть случаи, когда  равно 110, 108, 106, 104, 102, 100.

Переберем эти значения. Рассмотрим момент, когда  появился впервые (очевидно, номер этого члена последовательности заведомо не превзойдет, например, 10). В случае значений , равных 100, 102, 106, после вычитания 98 (на следующем шаге), мы попадем в элемент цепочки



и найдется член, который превзойдет 112 (и будет равен по крайней мере 128).

Значения , равные 104 и 110, приведут нас в элемент цепочки



Значение  приведет нас к цепочке



и вновь найдется член, который превзойдет 112 (и будет равен, по крайней мере, 160).

Ответ: а) да, б) 9777, в) 112.

**Примечание.**

Как можно было догадаться, что в пункте в) цепочку надо начинать с 7 (или 14)? Кстати, эта цепочка подходит и для пункта а). Дело в том, что в результате наших операций образуются числа вида , где  − нечетное число. Это число должно быть больше 98, но не сильно. Можно перебрать маленькие значения  и подобрать  как раз с этим условием ( больше 98, но не сильно). Так мы довольно быстро получаем число . Которое хорошо тем, что при вычитании 98, дает 14 . Это хорошее число, потому что  и после нескольких умножений на 2 мы вновь попадем в 112. (Например, , 6 − это далеко не такое хорошее число, хоть оно и меньше 14, т.к. после серии умножений 6 на 2, наименьшее число, которое будет больше 98, это 192.)

Можно было также думать: . Следовательно, если начать с 14, то через три операции мы получим . И при вычитании 98 мы получим , т.е. снова 14, а это для нас очень хорошо!

**5.**Готовясь к экзамену, Вася и Петя решали задачи из сборника, и каждый из них решил все задачи этого сборника. Каждый день Вася решал на одну задачу больше, чем в предыдущий день, а Петя решал на две задачи больше, чем в предыдущий день. Они начали решать задачи в один день, при этом в первый день каждый из них решил хотя бы одну задачу.

а) Могло ли получиться так, что каждый из них решил все задачи сборника ровно за 5 дней?

б) Могло ли получиться так, что каждый из них решил все задачи сборника ровно за 10 дней?

в) Какое наименьшее число задач могло быть в сборнике, если известно, что каждый из них решал задачи более 6 дней, в первый день Вася решил больше задач, чем Петя, а за семь дней Петя решил больше задач, чем Вася?

**Решение.**

Пусть Вася в первый день решил *a* задач, а Петя — *b* задач. Вася решал задачи *n* дней, а Петя — *m* дней. Воспользуемся формулой суммы арифметической прогрессии. Получим, что за *n* дней Вася решил  задач, а Петя за *m* дней решил  задач.

а) Проверим, могло ли получиться так, что каждый из них решил все задачи сборника ровно за 5 дней.

Вася за 5 дней решил  задач, а Петя  задач. Приравняем эти значения:  Откуда получаем, что  Таким образом, мальчики могли решить все задачи сборника ровно за пять дней, если Вася в первый день решил на две задачи больше, чем Петя.

б) Проверим, могло ли получиться так, что каждый из них решил все задачи сборника ровно за 10 дней.

Вася за 10 дней решил  задач, а Петя  задач. Приравняем эти значения:  Откуда получаем, что  Это равенство не может быть выполнено ни при каких целых *a* и *b*, следовательно, мальчики не могли решить все задачи сборника ровно за десять дней.

в) Пусть Вася решал задачи *k* дней, а Петя — *l* дней. Тогда



По условию  но при этом



Количество задач в сборнике будет минимальным при минимальных значениях *l* и *b*.

Минимальное возможное  Значение *а* должно удовлетворять условию  значение *k* — условию 

Проверим возможные значения и занесём их в таблицу:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *l* | *b* | *S* | *a* | *Уравнение* (\*) | *Натуральные решения* |
| 7 | 1 | 49 | 2 | https://ege.sdamgia.ru/formula/04/0422e34422f115e7aa54b4011af6aa38p.png | нет натуральных *k* |
| 7 | 1 | 49 | 3 | https://ege.sdamgia.ru/formula/18/18f5052c876c2ff18c823c621c97ae45p.png | нет натуральных *k* |
| 7 | 2 | 56 | 3 | https://ege.sdamgia.ru/formula/8e/8ec06c024b5baa20ded9af8ab93f14e6p.png | нет натуральных *k* |
| 7 | 2 | 56 | 4 | https://ege.sdamgia.ru/formula/e1/e1592d8e1ead8a2225fa39e63d36f8e6p.png | нет натуральных *k* |
| 7 | 3 | 63 | 4 | https://ege.sdamgia.ru/formula/22/225aeaa91f68c93420b88efba127300ap.png | нет натуральных *k* |
| 7 | 3 | 63 | 5 | https://ege.sdamgia.ru/formula/d3/d3a3ad1c2fda67093999d51144c735c9p.png | нет натуральных *k* |
| 7 | 4 | 70 | 5 | https://ege.sdamgia.ru/formula/af/af204b7107709fcce24aa38fbaa46757p.png | нет натуральных *k* |
| 7 | 4 | 70 | 6 | https://ege.sdamgia.ru/formula/f5/f53b4ca0ccdf0a0f9d8ba32b1c94fcbfp.png | нет натуральных *k* |
| 7 | 5 | 77, что больше 72 | ... | https://ege.sdamgia.ru/formula/72/7215ee9c7d9dc229d2921a40e899ec5fp.png |  |
| 8 | 1 | 64 | 2 | https://ege.sdamgia.ru/formula/e9/e9164bd2b4a594ce1460ba353b78efbep.png | нет натуральных *k* |
| 8 | 1 | 64 | 3 | https://ege.sdamgia.ru/formula/2d/2d79ad3b99a05a68d17910f700a888ebp.png | нет натуральных *k* |
| 8 | 2 | 72 | 3 | https://ege.sdamgia.ru/formula/81/81c019f47b8f0f562f0f9b213b6b7c46p.png | нет натуральных *k* |
| 8 | 2 | 72 | 4 | https://ege.sdamgia.ru/formula/5d/5dceaa5e5aa31355dad1e4772991590fp.png | https://ege.sdamgia.ru/formula/28/28a6ac6eddb6ff786095a8b17f785728p.png |
| 8 | 3 | 80,(что больше 72) |  |  |  |
| 9 | 1 | 81,(что больше 72) |  |  |  |
| ... | ... | больше, чем 72 |  |  |  |

Таким образом, наименьшее число задач в сборнике равно 72, и все условия задачи выполняются при *k* = 9, *a* = 4, *l* = 8, *b* = 2.

Ответ: а) да; б) нет; в) 72.

**6.**В течение *n* дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждые из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество чисел меньше, чем в предыдущий день.

а) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 8. Может ли *n*быть больше 7?

б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 4, среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни, быть больше 4,5?

в) Известно, что . Какое наименьшее количество чисел могло быть записано за все эти дни?

**Решение.**

а) Сумма натуральных чисел, записанных в первый день, равна 8. Следовательно, чисел, записанных в первый день, не более 8. Тогда в день *n* () записанных чисел не более 1. И это число заведомо больше 8 (т.к. сумма чисел с каждым днем увеличивается). Противоречие с условием (все записанные числа должны быть меньше 6).

б) Рассмотрим допустимую условиями конфигурацию (без учета среднего значения за все дни):

1 день 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 3

2 день 5 5 5 5 5 5 5 5 3 1

3 день 5 5 5 5 5 5 5 5 5

Действительно, среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, очевидно, меньше 4. В каждый последующий день чисел записано меньше, чем в предыдущий. А также сумма чисел, записанных в каждый последующий день, больше, чем в предыдущий. Очевидно, что если продолжать приписывать столбец (4 5 5) слева, то эти условия не нарушатся. Можно получить, скажем, такой пример:

1 день 100 четверок и 1 тройка

2 день 98 пятерок, 1 тройка и 1 единица

3 день 99 пятерок

Среднее арифметическое всех этих чисел, очевидно, больше 4,5.

в) Предположим, что в последний (четвертый) день записано одно число. Тогда в первый день записано не менее четырех чисел. Следовательно, в первый день сумма чисел не меньше 4. А в четвертый, соответственно, сумма чисел не меньше 7. Но в четвертый день записано ровно одно число. Противоречие с тем, что максимальное возможное число меньше 6.

Мы показали, что в четвертый день записано как минимум два числа. Тогда в третий день записано как минимум три числа, во второй день как минимум четыре числа, в первый день как минимум пять чисел. Всего на доске как минимум четырнадцать чисел. Такое, действительно, может быть:

1 день 1 1 1 1 1

2 день 3 1 1 1

3 день 5 1 1

4 день 5 5

Ответ: а) Нет; б) Да; в)  14.

**7.**Склад представляет собой прямоугольный параллелепипед с целыми сторонами, контейнеры — прямоугольные параллелепипеды с размерами 1×1×3 м. Контейнеры на складе можно класть как угодно, но параллельно границам склада.

а) Может ли оказаться, что полностью заполнить склад размером 120 кубометров нельзя?

б) Может ли оказаться, что на склад объемом 100 кубометров не удастся поместить 33 контейнера?

в) Пусть объем склада равен 800 кубометров. Какой процент объема такого склада удастся гарантировано заполнить контейнерами при любой конфигурации склада?

**Решение.**

а) Так как объем склада 120 м3, одно из измерений склада кратно трем. Будем класть контейнеры длинной стороной вдоль этого измерения. Таким образом, вдоль него полностью уместится целое число контейнеров. Вдоль остальных измерений лягут измерения контейнеров длины 1 м, поэтому указанным образом склад гарантированно удастся упаковать полностью.

б) Рассмотрим склад с размерами 2×2×25 м. Очевидно, что длинную сторону контейнера можно поместить только вдоль длинной стороны склада. При этом поместится не более восьми контейнеров, то есть поместится максимум 32 контейнера и еще 4 м3 объема останется свободно.

в) Покажем, что 99% объема склада 2×2×200 м можно заполнить контейнерами. Положим 66 контейнеров длинной стороной вдоль двухсотметровой стороны склада. Рядом с ними положим второй ряд из 66 контейнеров. На полученные два нижних ряда положим такие же два верхних ряда. Незаполненным останется пространство 2×2×2 м или 1% объема склада.

Осталось показать, что при любой другой конфигурации склада получится заполнить не менее 99% объема. Действительно, пусть сторона *а* склада *a*×*b*×*c* м не меньше трех. Отделим от нее участок склада со стороной 3, то есть с размерами 3×*b*×*c* м. Его можно заполнить контейнерами без пустот. Продолжаем отделять такие участки, пока не останется параллелепипед с измерениями, не превосходящими 2×2×2. Это и означает, что пустом пространством останется не более 8 из 800 кубометров.

Ответ: а) нет; б) да; в) 99%.

**Практикум задание 19.**

*Задача 1*. Перед каждым из чисел 6, 7, . . . , 11 и 9, 10, . . . , 17 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора прибавляют каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю сумму и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

*Задача 2*. На доске написано более 42, но менее 54 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно −7, среднее арифметическое всех положительных из них равно 6, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно −12.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

*Задача 3.*Набор состоит из 33 натуральных чисел, среди которых есть числа 3, 4 и 5. Среднее арифметическое любых 27 чисел этого набора меньше 2.

а) Может ли такой набор содержать ровно 13 единиц?

б) Может ли такой набор содержать менее 13 единиц?

в) Док-те, что в любом таком наборе есть несколько чисел, сумма которых равна 28.

*Задача 4.* Бесконечная арифметическая прогрессия, состоящая из различных натуральных чисел, первый член которой меньше 10, не содержит ни одного числа вида . Какое наименьшее значение может принимать сумма первых 10 членов этой прогрессии?

*Задача 5.* Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1512 и

а) пять;

б) четыре;

в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

*Задача 6.* Все члены геометрической прогрессии — различные натуральные числа, заключённые между числами 210 и 350.

а) Может ли такая прогрессия состоять из четырёх членов?

б) Может ли такая прогрессия состоять из пяти членов?

*Задача 7*. В возрастающей последовательности натуральных чисел каждые три последовательных члена образуют либо арифметическую, либо геометрическую прогрессию. Первый член последовательности равен 1, а последний 2046.

а) Может ли в последовательности быть три члена?

б) Может ли в последовательности быть четыре члена?

в) Может ли в последовательности быть меньше 2046 членов?

*Задача 8.*Дана последовательность натуральных чисел, причём каждый следующий член отличается от предыдущего либо на 10, либо в 7 раз. Сумма всех членов последовательности равна 163.

а) Какое наименьшее число членов может быть в этой последовательности?

б) Какое наибольшее число членов может быть в этой последовательности?

*Задача 9*. Каждое из чисел 1, −2, −3, 4, −5, 7, −8, 9, 10, −11 по одному записывают на 10 карточках. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел 1, −2, −3, 4, −5, 7, −8, 9, 10, −11. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные 10 сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

*Задача 10.*Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более от общего числа уч-ся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более от общего числа уч-ся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 10 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а) и б)?

*Задача 11*. Имеется 33 коробки массой 19 кг каждая и 27 коробок массой 49 кг каждая. Все эти коробки раскладываются по двум контейнерам. Пусть — модуль разности суммарных масс коробок в контейнерах. Найдите наименьшее значение :

а) если дополнительно требуется, что в контейнерах должно находиться одинаковое количество коробок;

б) без дополнительного условия пункта а).

*Задача 12.*Учитель в школе ставит отметки от 1 до 5. Средний балл ученика равен 4,625.

а) Какое наименьшее количество оценок может иметь ученик?

б) Если у ученика заменить оценки 3, 3, 5, 5 на две четвёрки, то на сколько максимально может увеличиться средний балл?

*Задача 13.*Натуральные числа от 1 до 12 разбивают на четыре группы, в каждой из которых есть по крайней мере два числа. Для каждой группы находят сумму чисел этой группы. Для каждой пары групп находят модуль разности полученных сумм и полученные 6 чисел складывают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) может ли в результате получиться 1?

в) Какое наименьшее возможное значение полученного результата?

*Задача 14.*По окружности расставляют 48 ненулевых целых чисел с общей суммой 20. При этом любые два стоящих рядом числа должны отличаться не более чем на 7 и среди любых четырёх, подряд идущих чисел, должно быть хотя бы одно положительное.

а) Среди таких 48 чисел найдите наибольшее возможное количество положительных.

 б) Среди таких 48 чисел найдите наименьшее возможное количество положительных.

**Ответы.**

*Задача 1.*3 и 1161

*Задача 2.*а) 48; б) отрицательных; в) 12

*Задача 3.* а) да; б) нет

*Задача 4.* 155

*Задача 5.* а) нет; б) нет; в) да

*Задача 6.* а) да; б) нет

*Задача 7.* а) нет; б) нет; в) да

*Задача 8.* а) 1; б) 39

*Задача 9.* а) нет; б) нет; в) 4

*Задача 10.* а) да; б) 10; в)

*Задача 11.* а) 30; б) 2

*Задача 12.* а) 8; б) на

*Задача 13.* а) нет; б) нет; в) 4

*Задача 14.* а) 45; б) 12

**Решения.**

*Задача 1.* В первом наборе 6 чисел; обозначим Во втором наборе 9 чисел; обозначим

Согласно условию строится следующая сумма:

Приводяподобные, получаем:

или,

гдеи

1) Ясно, что сумма S получается наибольшей, когда все числа берутся с плюсом:

.

2) Заметим, что среди чисел ровно три нечётных. Следовательно, *A* нечётно. Поэтому и нечётно. Кроме того, S делится на 3. Наименьшее по модулю нечётное число, делящееся на 3, есть 3. Стало быть, (оценка). Приведём пример расстановки знаков, при которой в оценке достигается равенство:

Таким образом,

►Как мы додумались до этого примера? Вот некоторые наводящие соображения. Пишем: , то есть . Следовательно, нам нужно добиться, чтобы и отличались на единицу (поскольку знаки можно расставлять как угодно). Сумму можно сделать равной 5 (вычитая из 9 четыре единицы), а для можно получить значение 3 (складывая три единицы). Тогда , а это как раз то, что нам нужно.◄

*Задача 2.* Напомним, что среднее арифметическое нескольких чисел есть сумма этих чисел, делённая на их количество. Пусть на доске написано *n* чисел. Тогда их сумма: . Обозначим: *p* — количество положительных чисел, *m* — количество отрицательных чисел, *z* — количество нулей. Таким образом,

Пусть и — суммы положительных и отрицательных чисел соответственно. Имеем: и так как , то:

a) Правая часть данного равенства делится на 6. Поскольку 6 и 7 взаимно простые, число *n* делится на 6. Между числами 42 и 54 есть только одно такое число: *n* = 48.

б) Из равенства получаем после сокращения на 6:

.

Кроме того:

.

Сложим полученные равенства: . Т.к. 104 при делении на 3 даёт остаток 2, число *z* также даёт остаток 2: . Отсюда:или

Соответственно,

.

Составляем разность:так что — отрицательных чисел написано больше.

в) Из равенства видим, что .

Приведём пример с (тогда ). Пусть написано 12 чисел 6, 34 числа −12 и два нуля. Этот набор удовлетворяет условию задачи: среднее арифметическое положительных чисел равно, очевидно, 6; среднее арифметическое отрицательных чисел равно −12, а среднее арифметическое всех чисел:

Следовательно, наибольшее возможное количество положительных чисел равно 12.

*Задача 3.* Если среднее арифметическое любых 27 чисел набора меньше 2, то сумма любых 27 чисел набора меньше 27 · 2 = 54. Будучи натуральным числом, эта сумма не превосходит 53.

Обозначим S максимальную сумму 27 чисел данного набора. Итак, .

а) Да, может. Такой набор содержит 13 единиц, 17 двоек и 3, 4, 5. Для него, очевидно,

►Наводящее соображение очень простое. Если есть ровно 13 единиц и 3, 4, 5, то оставшиеся 17 вакансий заполняются как минимум двойками. Вот и возьмём набор с этими 17-ю двойками! Ясно, что максимальная сумма получится, если в качестве слагаемых взять 3, 4, 5 и все двойки, добрав остаток единицами.◄

б) Предположим, что набор содержит *k* единиц (). Остальные чисел набора(помимо 3, 4, 5) назовём вакантными. Вакантных чисел, стало быть, не менее 18, и каждое вакантное число не меньше 2.

Таким образом, наш набор содержит 3, 4, 5 и восемнадцать чисел, не меньших 2; остальныечисла набора не меньше 1. Для максимальной суммы тогда получаем:

Данное неравенство показывает, что набор не может содержать менее 13 единиц.

в) Заметим сразу, что если набор содержит не менее 16 единиц, то Поэтому остаётся разобрать случаи, когда количество *k* единиц в наборе менее 16. Остальные чисел (помимо 3, 4, 5) продолжаем называть вакантными.

• . Легко видеть, что набор, предъявленный в пункте а), оказывается единственнымнабором с ровно 13 единицами. В самом деле, для любого другого такого набора сумма 17-ти вакантных чисел будет больше 17 · 2 = 34, и сумма станет больше 53. А для предъявленного набора имеем:

• или . Заметим, что среди вакантных чисел обязательно найдётся двойка.В самом деле, иначе все вакантные числа (которых, соответственно, 16 или 15) будут не меньше 3, и тогда их сумма окажется как минимум 15 · 3 = 45, что противоречит условию. Остаётся взять 14 единиц и эту двойку:

Доказательство закончено.

*Задача 4.* Числа вида будем называть запрещёнными. Вот начало последовательности запрещённых чисел: 1, 3, 6, 10, 15, . . .

Пусть *a* и *d* — первый член и разность арифметической прогрессии. Так как число 1 запрещённое, то . Так как члены прогрессии — различные натуральные числа, то .

Если , то прогрессия будет содержать запрещённое число — например, 10. Если ,то прогрессия также будет содержать запрещённое число — например, 10 для чётного *a* и 15для нечётного *a*. Стало быть, .

Сумма первых 10 членов прогрессии равна:

С учётом полученных неравенств имеем оценку:

Нижнее значение 155 нашей оценки реализуется для прогрессии с и (то есть дляпрогрессии 2, 5, 8, . . .). Остаётся показать, что эта прогрессия не содержит запрещённых чисел.

Под номером *k* в данной прогрессии идёт число . Нам нужно доказать,что равенство

невозможно ни при каких *k* и *n*. Перепишем это равенство в виде:

Число *n* при делении на 3 может давать остатки 0, 1 или 2. Рассмотрим отдельно каждыйиз этих случаев.

Всюду имеем противоречие: левая часть *6k* делится на 3, а правая часть на 3 не делится(остаток 2 в первом и третьем случаях, остаток 1 во втором случае).

Таким образом, прогрессия 2, 5, 8, . . . действительно не содержит запрещённых чисел. Поскольку для неё , то 155 — наименьшее значение величины .

*Задача 5.* Найдём каноническое разложение числа 1512:

Пусть также 1512 = , где — различные натуральные числа.

а) Предположим, что все пять чисел образуют геометрическую прогрессию. Тогдасогласно *представлениюконечной целочисленной геометрической прогрессии* найдутся целые числа *k, a, b* такие, что:

Не теряя общности, можно считать, что прогрессия возрастающая. Тогда . Перемножаячисла , получим:

Выходит, что 1512 делится на 10-ю степень некоторого натурального числа . Но этопротиворечит каноническому разложению числа 1512 (где нет простых множителей в десятойстепени). Следовательно, числа не могут образовывать геометрическую прогрессию.

б) Предположим, что числа образуют возрастающую геометрическую прогрессию. Тогда:

Перемножаем числа :

Снова противоречие: 1512 не может делиться на шестую степень натурального числа .

Поэтому и в данном случае ответ отрицательный.

►Заметим, что из пункта б) следует пункт а). В самом деле, если среди сомножителей ненайдётся четырёх членов геометрической прогрессии, то пяти членов не найдётся и подавно. Поэтомурешение можно было бы начать сразу с пункта б). Мы привели отдельное решение для пункта а) изметодических соображений.◄

в) Предъявляем соответствующий пример: 4 · 6 · 9 · 7 · 1 = 1512. Числа 4, 6, 9 образуютгеометрическую прогрессию со знаменателем .

►Пример найден следующим образом. Предположим, что числа образуют геометрическуюпрогрессию:

Тогда. Глядя на каноническое разложение числа 1512, берём.◄

*Задача 6.*

а) Да, может: 216, 252, 294, 343. Это геометрическая прогрессия со знаменателем .

►Четыре числа, образующих геометрическую прогрессию, имеют вид:

Остаётся заметить, что , и положить .

Данный пример позволяет почувствовать также, что втиснуть в интервал от 210 до 350 пять чисел,образующих геометрическую прогрессию, уже вряд ли получится. Поэтому в пункте б) надо пытатьсядоказать, что это невозможно. ◄

б) Предположим, что прогрессия состоит из пяти членов:

Без ограничения общности считаем прогрессию возрастающей, так что . Поскольку всечлены прогрессии находятся между числами 210 и 350, имеем:

Из неравенства (∗∗) следует, что *b* может принимать только значения 2, 3 или 4. Рассмотримэти три случая по отдельности.

• . Тогда . Имеем:

Противоречие.

• . Тогда или . Имеем:

Противоречие.

• . Тогда . Имеем:

Снова противоречие.

Противоречия, полученные во всех трёх случаях, показывают, что прогрессия не можетсостоять из пяти членов.

*Задача 7.*

а) Предположим, что в последовательности три члена. Тогда она имеет вид:

Если эти числа образуют арифметическую прогрессию, то . Имеем противоречие: левая часть чётна, а правая нечётна.

Если эти числа образуют геометрическую прогрессию, то . Снова противоречие,ибо 2046 не является квадратом натурального числа

Поэтому три члена в последовательности быть не может.

б) Предположим, что в последовательности четыре члена: Логически возможнычетыре случая.

1. Первые три числа образуют арифметическую прогрессию и вторые три числа образуютарифметическую прогрессию (то если все четыре числа образуют арифметическую прогрессию). Тогда имеем:

Выражаем *b* из первого равенства и подставляем во второе:

Противоречие: левая часть делится на 3, а правая не делится.

2. Первые три числа образуют арифметическую прогрессию, а вторые три числа образуютгеометрическую прогрессию. Тогда:

После исключения *b*:

Слева стоит квадрат нечётного числа, который также является нечётным числом. Справастоит чётное число. Противоречие.

3. Первые три числа образуют геометрическую прогрессию, вторые три числа образуютарифметическую прогрессию. Тогда:

Приходим к квадратному уравнению: . Его дискриминант 16369 неявляется квадратом натурального числа (). Значит, это уравнение неимеет натуральных корней.

4. Первые три числа образуют геометрическую прогрессию и вторые три числа образуютгеометрическую прогрессию (то есть все четыре числа образуют геометрическую прогрессию). Тогда:

Отсюда , то есть . Это невозможно, поскольку 2046 не является кубомнатурального числа

Итак, в каждом случае получаем противоречие. Следовательно, данная последовательностьне может состоять из четырёх членов.

в) В последовательности может быть менее 2046 членов. Вот пример арифметической прогрессии из шести чисел: 1, 410, 819, 1228, 1637, 2046.

►Сконструируем арифметическую прогрессию с первым членом 1 и *n*-м членом 2046. Пусть разностьэтой прогрессии равна *d*. Имеем:

Полагаем, находим и выписываем прогрессию. ◄

*Задача 8.*

а) В последовательности не менее одного члена. Но последовательность, состоящая из одного числа 163, удовлетворяет условию задачи. Поэтому наименьшее возможное число членовпоследовательности равно 1.

б) Заметим прежде всего, что последовательность не может состоять только из чередующихся чисел 1 и 7. В самом деле, если такая последовательность содержит чётное число членов, тоеё сумма делится на 8. Если же число членов нечётно, то при делении суммы последовательности на 8 могут получиться только остатки 1 или 7 — в случаях (1, 7, . . . , 1, 7, 1) и (7, 1, . . . 7, 1, 7)соответственно. Однако число 163 при делении на 8 даёт остаток 3.

Стало быть, в последовательности имеется число *b*, отличное от 1 и 7. Ясно, что .

Покажем, что в последовательности не может быть более 39 чисел. Предположим обратное:пусть в последовательности имеется не менее 40 членов. Первые 40 чисел этойпоследовательности разобьём на пары: Имеются две возможности.

1. Число *b* не попадает ни в одну из этих первых 20 пар. Поскольку сумма чисел в каждойпаре не менее 8, сумма всех членов последовательности будет не менеевопреки условию.

2. Число *b* попадает в одну из первых 20 пар. Сумма чисел в этой паре не менее сумма чисел во всех оставшихся 19 парах не менее . Тогда сумма последовательности оказывается не менее , а это снова противоречит условию.

Таким образом, последовательность содержит менее 40 членов. Предъявим пример последовательности, удовлетворяющей условию и состоящей из 39 членов. Она состоит из 19 пар (7, 1)и заканчивается числом 11:

Действительно, сумма такой последовательности равна .

Итак, наибольшее возможное число членов последовательности равно 39.

*Задача 9.* Присвоим каждой карточке номер от 1 до 10. Пусть — числа, данные в условиии записанные на карточках вначале (число записано на карточке с номером *k*). Аналогично, — числа того же набора, но записанные на карточках после их перемешивания.

Согласно условию рассматриваем число:

а) Предположим, что . Тогда в произведении (∗) найдётся нулевой множитель, то есть для некоторого *k*. Но это невозможно, так как в данном наборе ни для какого числанет ему противоположного по знаку. Значит, 0 получиться не может.

б) Предположим, что *c* нечётно. Тогда в произведении (∗) каждый множитель должен бытьнечётным, то есть нечётно для любого

Следовательно, для каждого *k* в паре одно число чётное, а другое нечётное. Поэтому впоследовательности окажется 10 чётных и 10 нечётных чисел. Однако изусловия вытекает, что указанная последовательность содержит 8 чётных чисел и 12 нечётных.

Возникшее противоречие показывает, что *c* обязано быть чётным. В частности, 1 получитьсяне может.

в) Далее считаем, что . Предположим, что . Тогда в произведении (∗) ровноодин из множителей по модулю равен 2, а все остальные по модулю равны 1. Иными словами, для некоторого *m* и для всех остальных *k*.

Числа оба чётные или оба нечётные. В каждой из остальных девяти пар одно число чётное, а другое нечётное. Стало быть, в последовательности окажется или 11 чётных и 9 нечётных чисел (если чётны), или, наоборот, 9 чётных и 11нечётных чисел (если нечётны). Но, как было указано выше, чётных и нечётных чиселв этой последовательности имеется 8 и 12 соответственно.

Значит, случай невозможен. Поскольку *c* чётно, имеем оценку: .

Приведём пример, в котором достигается равенство . Пусть сначала на карточкахнаписаны числа в исходном порядке:1, −2, −3, 4, −5, 7, −8, 9, 10, −11.

Затем на тех же карточках оказались числа:−2, 1, 4, −3, 7, −5, 9, −8, −11, 10.

Получаем:

Следовательно, наименьшее неотрицательное значение *c* равно 4.

*Задача 10.* Пусть *m* — число мальчиков, *d* — число девочек в группе. Пусть мальчиков сходили втеатр, мальчиков сходили в кино, девочек сходили в театр, девочек сходили в кино.

Для случая похода в театр имеем:

Для случая посещения кино:

Сложим первое из полученных неравенств с удвоенным вторым:

Поскольку каждый мальчик сходил либо в театр, либо в кино, имеем . Крометого, очевидно, Получаем:

то есть

a) Да, 10 мальчиков могло быть в группе из 20 учащихся. Например, в театр сходили 3мальчика и все 10 девочек, в кино — остальные 7 мальчиков и 10 девочек. Нужные неравенствавыполнены:

►Как построен пример? Прежде всего, значения не противоречат неравенству (∗),и это наводит на мысль, что пример тут возможен. Затем берём неравенства задействуем девочек по максимуму и находим подходящие . ◄

б) Предположим, что в группе из 20 учащихся имеется не менее 11 мальчиков: . Тогда. Имеем: , что противоречит неравенству (∗). Следовательно, ,и с учётом пункта а) приходим к выводу, что наибольшее возможное количество мальчиков вгруппе равно 10.

в) Перепишем неравенство (∗) следующим образом:

Как видим, доля девочек не меньше . Приведём пример, когда равенство достигается.Пусть в группе 9 мальчиков и 8 девочек. В театр сходили 3 мальчика и 8 девочек, в киносходили 6 мальчиков и 8 девочек. Нужные неравенства выполнены:

Следовательно, наименьшая возможная доля девочек равна .

*Задача 11.*

a) Всего имеется коробок. Значит, в каждом контейнере должно находиться по30 коробок.

Пусть *x*- количество лёгких (по 19 кг) коробок в 1 контейнере. Тогда число тяжёлых(по 49 кг) коробок в 1 контейнере равно . Во 2 контейнере лёгких коробокполучается , а тяжёлых коробок:

Суммарные массы коробок в первом и втором контейнерах равны соответственно:

Отсюда:

Числоявляется нечётным и принимает наименьшее возможное значение 1 при. Следовательно, наименьшее значение равно 30.

б) Пусть в первом контейнере находится *x* лёгких коробок и *y* тяжёлых коробок. Тогда вовтором контейнере будет лёгких и тяжёлых коробок соответственно. Имеем:

При этом имеют место неравенства:

Величина равна:

Нам, таким образом, требуется найти минимальное значение при условии, что выполненыоба неравенства (1).

Заметим, что возможен прямой перебор всех значений

тоесть последовательное рассмотрение всех вариантов. Вообще, исчерпывающий переборконечного числа вариантов — это полноценное решение задачи! Но мы, естественно, такимпутём не пойдём и поищем способ избежать прямого перебора.

Прежде всего проверим, не может ли равняться нулю. Для этого рассмотрим уравнение:

Будем использовать остатки от деления на 7. Перепишем уравнение (2) следующим образом:

Нетрудно проверить, что даёт остаток Значит, и слагаемое даётостаток 2 (ведь остальные слагаемые в левой части делятся на 7). Какой остаток при этом даётсам ? Перебор остатков от 0 до 6 показывает, что единственная возможность — это остаток 6,то есть

Подставляем (3) в (2):

и после сокращения на 7:

Благодаря этому сокращению уравнение (4) проще уравнения (2). Повторим всюэту процедуру — теперь уже применительно к уравнению (4). Начинаем так же:

Правая часть 123 даёт остаток . Значит, и даёт остаток 4. Тогда *k*может давать только остаток 5:

Подставляя (5) в (3), получим: . Таким образом, оказывается,что — вопреки первому неравенству (1).

Итак, уравнение (2) не имеет решений, удовлетворяющих (1). Поэтому .

►А какие решения есть? Доведём до конца решение уравнения (2) — полезно посмотреть, чем дело кончится. Подставим (5) в (4):

Отсюда видно, что единственная возможность - это . Остаётся найти *x*. Из (5) и (3)последовательно получаем:

Итак, уравнение (2) имеет единственное решение в натуральных числах. Это решение неудовлетворяет условию (1). ◄

Поскольку является чётным числом, имеем оценку: . Равенство достигается, например, в случае :

Следовательно, наименьшее значение равно 2.

►Как найден пример? Берём уравнение и решаем его тем же способом — через остаткиот деления на 7. Упражняйтесь! ◄

*Задача 12.*

а) Пусть ученик имеет *n* оценок и — их сумма. Тогда:

Отсюда , так что *n* делится на 8. Поэтому .

Приведём пример с . Пусть ученик имеет семь пятёрок и двойку. Тогда его среднийбалл:

Итак, наименьшее возможное количество оценок ученика равно 8.

б) Пусть ученик имел оценки Обозначим

Заметим сразу, что

Посмотрим, какие ограничения на *k* накладывает тот факт, что средний балл равен 4,675.Сумма оценок ученика равна , количество оценок равно , так что

Отсюда легко получаем:

Правая часть должна делиться на 8. Число 20 при делении на 8 даёт остаток 4.Значит, при делении на 8 также должно давать остаток 4. Какой остаток даёт само *k*?Поскольку делится на 8, число при делении на 8 даёт остаток 4.Перебирая остатки от 0 до 7, легко видим, что и *k* даёт остаток 4:

Подставляем это в (2):

и после сокращения на 8 получим:

Теперь подставляем (3) и (4) в неравенство (1):

откуда , то есть . Вместе с (3) это даёт нам нужное неравенство на *k*:

Пусть теперь оценки ученика стали . Сумма оценок равна , количествооценок равно . Находим изменение среднего балла:

Сучётом (2) имеем:

Максимальное значение ∆ достигается при минимально возможном значении *k*, равном 12:

Таким образом, максимальное увеличение среднего балла составляет .

*Задача 13.*

Пусть — суммы чисел в четырёх группах. Согласно условию нас интересуетсумма:

Ясно, что — целое неотрицательное число.

Отметим сразу же, что

а) Предположим, что . Тогда все шесть слагаемых в (1) равны нулю, что немедленнодаёт . Но это невозможно ввиду (2), поскольку 78 не делится на 4. Следовательно, 0 в результате получиться не может.

б) Предположим, что . Тогда одно слагаемое в (1) равно единице, а остальные пятьслагаемых равны нулю.

Без ограничения общности можно считать, что. Но тогда из и получаем соответственно . Возникшее противоречиепоказывает, что 1 в результате получиться не может.

в) Заметим, что имеется самое большее три слагаемых в (1), которые не содержат фиксированную букву (например, букву не содержат слагаемые Поэтому, если взять любые четыре слагаемых в (1), то в них непременно будут фигурировать все четыребуквы .

Т.o., если четыре каких-то слагаемых в (1) равны нулю, то

Данное равенство, как было отмечено выше, невозможно. Следовательно, никакие четыре слагаемыe в (1) не могут равняться нулю.

Иными словами, как минимум три слагаемых в (1) должны быть отличны от нуля. Темсамым оказывается невозможным случай .

Предположим, что . Тогда три слагаемых в (1) равны единице, а остальные три — нулю.При этом нулю могут равняться лишь такие три слагаемых, которые не содержат некоторойбуквы (в противном случае — когда в трёх нулевых слагаемых фигурируют все четыре буквы — остальные три слагаемых также обратятся в нуль).

Пусть, например, то есть . Тогда и

Получаем противоречие: слева стоит чётное число, а справа — нечётное. Значит, невозможно.

Приведём пример с . Группы возьмём такие:(Здесь ,. Подставляем в (1):

Тем самым доказано, что наименьшее возможное значение равно 4.

*Задача 14.*Пусть по кругу расставлены числа . Количество положительных чисел срединих обозначим *p*.

а) Поскольку сумма всех чисел равна 20, среди них есть как положительные, так и отрицательные. Поэтому .

Пусть . В этом случае сумма положительных чисел не менее 47. Но тогда единственноеотрицательное число меньше или равно −27 и потому отличается от соседних чисел более чемна 7. Это противоречит условию. Значит, .

Пусть . Сумма положительных чисел не менее 46. Отрицательных чисел всего два, иих сумма меньше или равна −26. Значит, одно из отрицательных чисел меньше или равно −13.Это число отличается от соседнего положительного числа более чем на 7. Поэтому .

Приведём пример, когда . Положим

,

Легко видеть, что все условия задачи выполнены. Следовательно, наибольшее возможное значение *p* равно 45.

б) Из того, что среди любых четырёх, подряд идущих чисел, имеется хотя бы одно положительное, следует, что . Всамомделе, разобьёмнаши 48 чиселна 12 четвёрок:

Если , то по крайней мере в одной четвёрке не будет положительного числа — вопрекиусловию.

Остаётся предъявить пример с . Пусть

а остальные 36 чисел равны −1. Легко проверить, что условия задачи выполнены.

Стало быть,наименьшее возможное значение *p* равно 12.